Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika

Pismeni ispit iz Euklidske geometrije II, 27.09.2013. (ispit pisati isključivo hemijskom olovkom plave ili crne tinte)

1. (40%)(a) Neka su M, N, P i Q različite tačke neke ravni α takve da je tačka S presječna tačka prave određena tačkama P i Q i pri tome važi $MS \cong NS$ i $PS \cong QS$. Ako je A tačka van ravni α takva da je $AM \cong AN$ i $AP \cong AQ$, dokazati da je prava AS normalna na ravan α.
Napomena: U rješavanju zadatka možda ćete naći korisno da iskoristite teoremu: Ako je prava n normalna na dvije date prave a i b ravni α koje se sijeku, tada je $n \perp \alpha$.

(60%)(b) Ako su P i Q redom, tačke mimoilaznih pravih p i q euklidskog prostora takve da je prava $p(P,Q)$ normalna na pravama p i q, dokazati da je duž PQ kraća od svih ostalih duži koje spajaju tačke pravih p i q.
Napomena: U rješavanju zadatka možda ćete naći korisno da iskoristite teoremu: Postoji jedinstvena prava n koja siječe dvije mimoilazne prave p i q i okomita je na njih.

2. (40%)(a) Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su mu dati stranica a, ugao α i visina h_a.

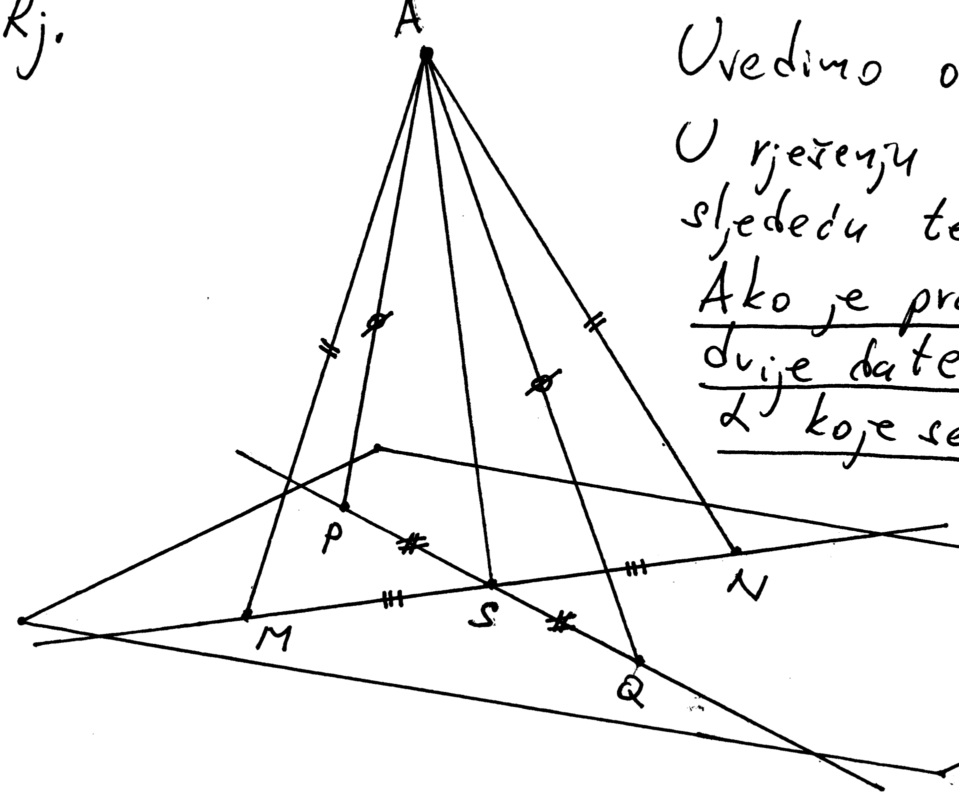
(60%)(b) Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako je dato $AM = t_a$ i poluprečnici R_1 i R_2 krugova opisanih oko trouglova $\triangle ABM$ i $\triangle ACM$.

3. (50%)(a) Neka je $\triangle ABC$ dati trougao i neka su D i E proizvoljne tačke, redom, na stranicama AB i AC. Produžimo, redom, AB i AC do tačaka G i H tako da je $A-B-G$, $BG \cong AD$, $A-C-H$ i $CH \cong AE$. Ako je L presječna tačka duži BH i CG, pokazati da je $P_{\triangle LGH} = P_{\triangle ADE} + P_{\triangle LBC}$.

(50%)(b) Konstruisati krug koji dodiruje dvije date prave i dati krug. Detaljno sprovesti samo Analizu (ne koristiti dokaz tipa pozivanja na neki drugi Apolonijev problem, koji je od ranije poznat, nego sve detaljno analizirati). Konstrukciju, Dokaz i Diskuciju možete uraditi ali bodovati će se samo Analiza.

(#) Neka su M, N, P i Q različite tačke neke ravni α takve da je tačka S presječna tačka prave određene tačkama P i Q i pri tome važi $MS \cong NS$ i $PS \cong QS$. Ako je A tačka van ravni α takva da je $AM \cong AN$ i $AP \cong AQ$, dokazati da je prava AS normalna na ravan α.

Rj.



Uvedimo oznake kao na slici.

U rješenju ćemo iskoristiti sljedeću teoremu:

<u>Ako je prava n normalna na dvije date prave a i b ravni α koje se sijeku, tada je $n \perp \alpha$.</u> ...(*)

Posmatrajmo trouglove $\triangle AMS$ i $\triangle ANS$.

$$\left.\begin{array}{l} AM \cong AN \\ MS \cong NS \\ AS \cong AS \end{array}\right\} \overset{SSS}{\Longrightarrow} \triangle AMS \cong \triangle ANS$$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle ASM \cong \measuredangle ASN$$ a kako su ovo dva naporedna ugla to je $AS \perp p(M,N)$ ...(1)

Posmatrajmo sad trouglove $\triangle APS$ i $\triangle AQS$.

$$\left.\begin{array}{l} AP \cong AQ \\ PS \cong QS \\ AS \cong AS \end{array}\right\} \overset{SSS}{\Longrightarrow} \triangle APS \cong \triangle AQS$$

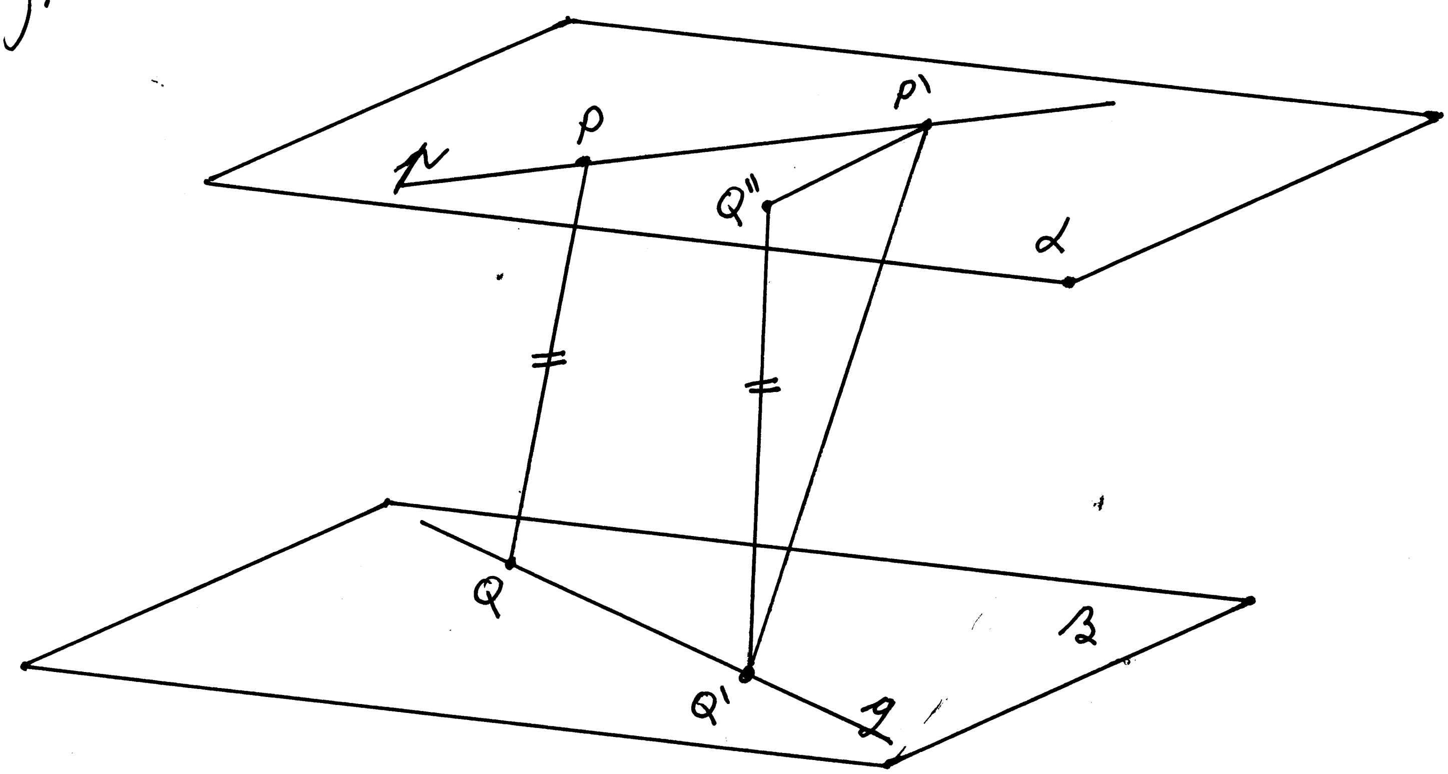
$$\Downarrow$$

$$\measuredangle ASP \cong \measuredangle ASQ$$ a kako su ovo dva naporedna ugla to je $AS \perp p(P,Q)$ ...(2)

Prema (*), (1) i (2) $\Rightarrow AS \perp \alpha$ q.e.d.

Ako su P i Q redom tačke mimoilaznih pravih p i q euklidskog prostora takve da je prava $p(P,Q)$ normalna na pravama p i q, dokazati da je duž PQ kraća od svih ostalih duži koje spajaju tačke pravih p i q.

Rj.



Uvedimo oznake kao na slici.

Neka je α ravan koja je normalna na pravu $p(P,Q)$ i sadrži pravu p, a β ravan koja je normalna na pravoj $p(P,Q)$ i sadrži pravu q.

Neka su P' i Q' proizvoljne tačke redom pravih p i q. Trebamo pokazati da za slučaje kada je

a) $P \neq P'$, $Q = Q'$

b) $P = P'$, $Q \neq Q'$

c) $P \neq P'$, $Q \neq Q'$

uvijek imamo (uvijek vrijedi) da je $PQ < P'Q'$,

a) $P \neq P'$, $Q = Q'$

Trouga $\Delta PQP'$ je pravougli (sa pravim uglom kod tjemena P) pa je njegova hipotenuza (duž $P'Q$) duža od katete (duž PQ) tj. $PQ < P'Q'$

b) $P = P'$, $Q \neq Q'$

Trougao $\Delta PQQ'$ je pravougli (sa pravim uglom kod vrha Q) pa je njegova hipotenuza duža od katete tj. $PQ < PQ'$ (tj. $PQ < P'Q'$).

c) $P \neq P'$, $Q \neq Q'$

Neka je Q'' podnožje normale iz tačke Q' na ravan α.

$Q'Q'' \perp \alpha$ i $\alpha \parallel \beta \Rightarrow Q'Q'' \perp \beta \Rightarrow Q'Q'' \perp q$

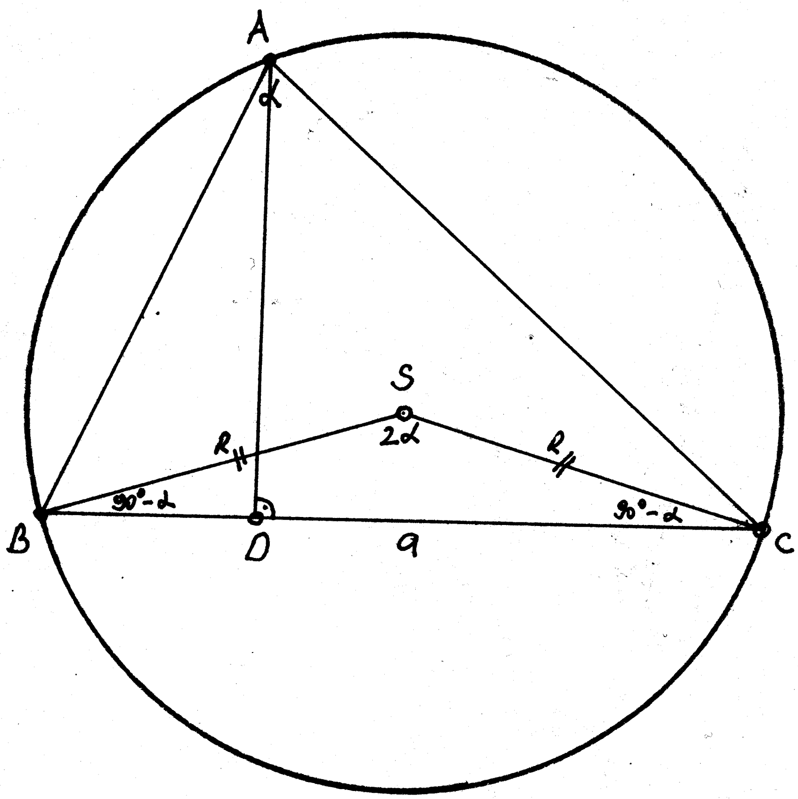
$p \subseteq \alpha$ i $Q'Q'' \perp \alpha \Rightarrow Q'Q'' \perp p$

Tačke P' i Q'' su različite (u suprotnom prava $Q'Q''$ siječe mimoilazne prave p i q i na njima je normalna, što je u kontradikciji sa teoremom: Postoji jedinstvena prava n koja siječe dvije mimoilazne prave p i q i okomita je na njih. (jer prava $n(P,Q)$ siječe mimoilazne prave p i q i na njima je normalna i takva prava je na osnovu navedene teoreme jedinstvena). Prema tome P' i Q' su različite i $Q'Q'' \perp Q''P \Rightarrow \Delta P'Q'Q''$ pravougli $\Rightarrow Q'P' > Q'Q''$ a kako je $PQ \cong Q'Q'' \Rightarrow PQ < P'Q'$

Konstruisati trougao ΔABC ako su mu dati stranica a, visina h_a i ugao α.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat trougao ΔABC u kome je $AD = h_a$ visina na stranica a.

$\angle BAC = \alpha$.

Označimo sa S centar opisane kružnice trougla ΔABC.

Kako je $\angle BAC$ oštri periferiski ugao nad tetivom BC to je $\angle BSC = 2\alpha$.

ΔSBC jkk $\Rightarrow$ $\angle CBS = \angle BCS = 90° - \alpha$.

U trouglu ΔBCS znamo jednu stranicu i veličine sva tri ugla pa ga možemo konstruisati.

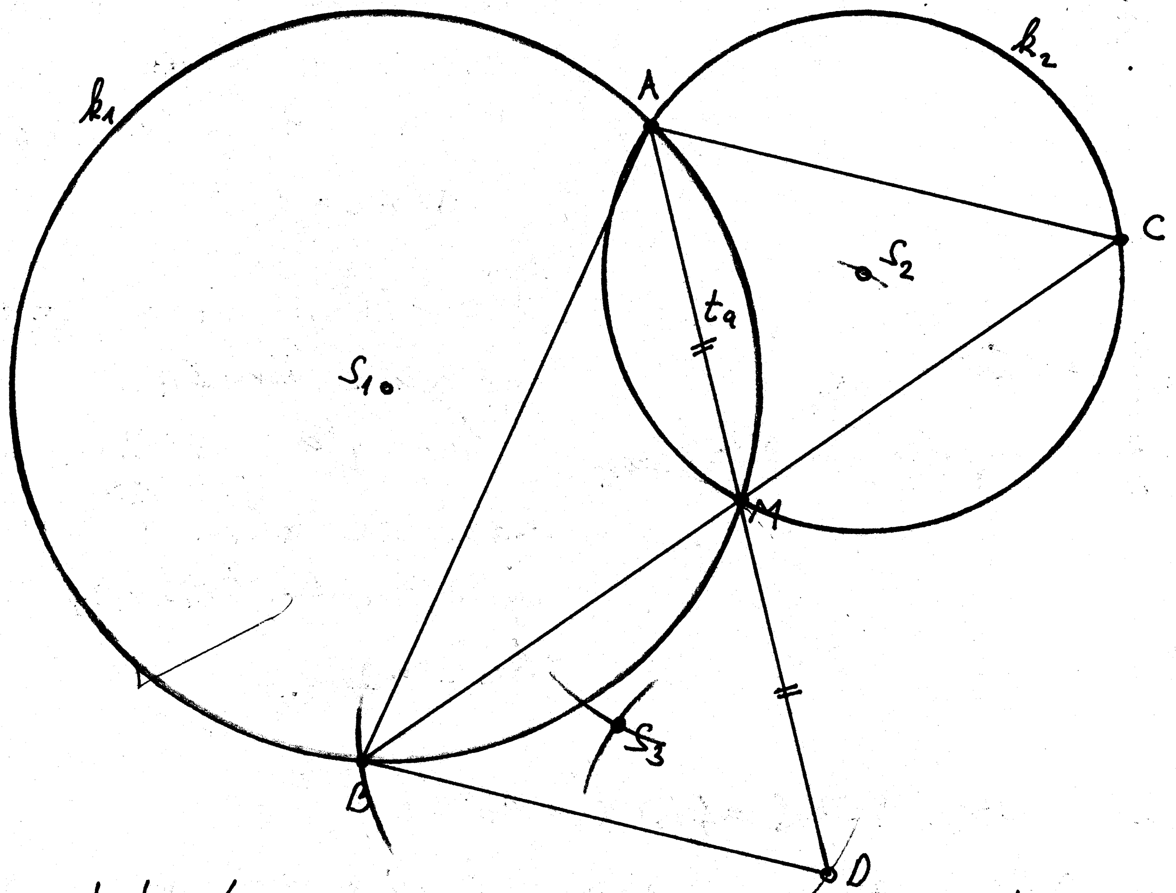
Tjeme A ćemo dobiti kao presjek $k(S, SB)$ i prave koja je paralelna sa $p(B, C)$ i udaljena od nje za dužinu h_a.

Trougao ΔABC možemo konstruisati.

Konstruisati trougao ΔABC ako je dato $AM = t_a$ i poluprečnici R_1 i R_2 kružnica opisanih oko trouglova ΔABM i ΔACM.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat trougao ΔABC, tačka M sredina stranice BC i tačke S_1 i S_2 centri opisanih kružnica oko trouglova ΔABM i ΔACM.
Kako je data duž $AM = t_a$ i poluprečnici R_1 i R_2, a znamo da je $S_1A = S_1M = R_1$ i $S_2A = S_2M = R_2$ to kružnice $k_1(S_1, R_1)$ i $k_2(S_2, R_2)$ možemo konstruisati.
Ako na pravoj $p(A, M)$ uzmemo tačku D takvu da je A-M-D i $AM \cong MD$ imamo:

$$\left.\begin{array}{l} BM \cong MC \\ \measuredangle BMD \cong \measuredangle CMA \text{ (unakrsni)} \\ MD \cong AM \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \Delta BMD \cong \Delta CMD$$

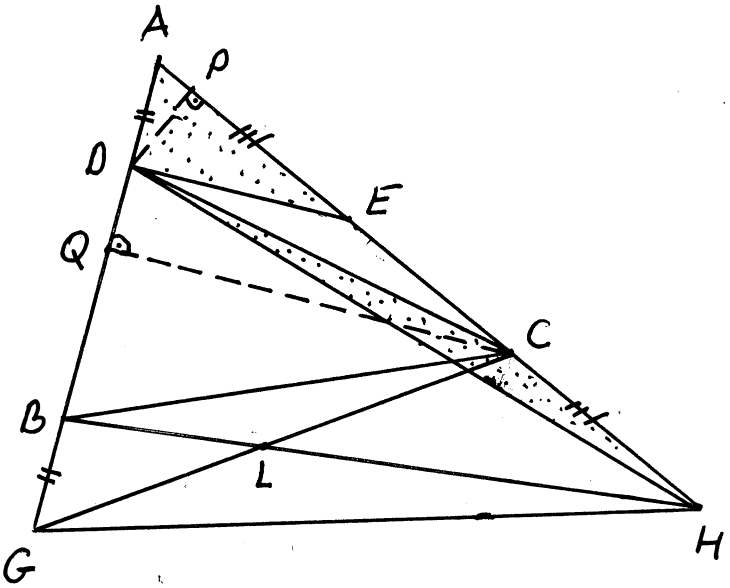
$\Downarrow$ ova dva trougla imaju podudarne poluprečnike opisane kružnice

Prema tome centar S_3 opisane kružnice trougla ΔBMD mogu konstruisati, time i tačku B pa i ΔABC.

(#) Neka je ΔABC dati trougao i neka su D i E proizvoljne tačke, redom, na stranicama AB i AC. Produžimo, redom, AB i AC do tačaka G i H tako da $A-B-G$, $BG \cong AD$, $A-C-H$ i $CH \cong AE$. Ako je L presječna tačka duži BH i CG, pokazati da je

$$P_{\Delta LGH} = P_{\Delta ADE} + P_{\Delta LBC}.$$

Rj.



Uvedimo oznake kao na slici. Prvo primjetimo da je

$$P_{\Delta ADE} = P_{\Delta CDH} \quad \ldots(1)$$

(zato što imaju jednake stranice $AE \cong CH$ i istu visinu koja odgovara toj stranici)

Zbog sličnog razloga (podudarne stranice i odgovarajuće visine) imamo $P_{\Delta ADH} = P_{\Delta HBG} \quad \ldots(2)$ i $P_{\Delta ADC} = P_{\Delta CBG}. \quad \ldots(3)$

Sad primjetimo

$$P_{\Delta ADH} = P_{\Delta ADC} + P_{\Delta CDH} \overset{(1)}{=} P_{\Delta ADC} + P_{\Delta ADE},$$

$$P_{\Delta HBG} \overset{(2)}{=} P_{\Delta ADH} = P_{\Delta ADC} + P_{\Delta CDH} \overset{(3)(1)}{=} P_{\Delta CBG} + P_{\Delta ADE}$$

tj. imamo $P_{\Delta HBG} = P_{\Delta CBG} + P_{\Delta ADE}$

Ako oduzmemo $P_{\Delta BGL}$ sa obe strane imamo

$$P_{\Delta LGH} = P_{\Delta CBL} + P_{\Delta ADE} \quad \text{q.e.d.}$$